

TD n° 6 – Analyse harmonique sur les surfaces hyperboliques compactes

Exercice 1. Laplacien hyperbolique L'opérateur laplacien sur \mathbb{H}^2 s'écrit, pour tout système de coordonnées réelles (x_1, x_2)

$$\Delta = \sum_{i,j=1}^2 \frac{1}{\sqrt{|\det(g)|}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sqrt{|\det(g)|} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \right),$$

où g est la représentation matricielle de la métrique hyperbolique dans les coordonnées (x_1, x_2) , de sorte que

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij} dx_i dx_j,$$

et $g^{ij} = (g^{-1})_{ij}$ est un coefficient de la matrice inverse.

1. Donner une expression de Δ dans les représentations du demi-plan et du disque.
2. Montrer que le laplacien commute avec les opérateurs de translation $T_g : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{H}^2) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$T_g f(z) = f(g^{-1}z), \quad \forall z \in \mathbb{H}^2, \forall g \in \text{PSL}(2, \mathbb{R}).$$

Solution.

1. Dans les deux cas, la représentation matricielle de la métrique est diagonale, donc son inverse est facile à calculer. On obtient :

— Dans le demi-plan :

$$\Delta = y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right),$$

— Dans le disque :

$$\Delta = \frac{(1 - x^2 - y^2)^2}{4} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right).$$

2. Puisque tout élément de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ est le produit de transformations de la forme $g_a : z \mapsto az$ pour $a > 0$, $g_b : z \mapsto z + b$ pour $b \in \mathbb{R}$, $g_{\text{inv}} : z \mapsto -\frac{1}{z}$ et $g_{\text{conj}} : z \mapsto -\bar{z}$, donc il suffit de montrer que

$$\Delta(T_g f)(z) = T_g \Delta f(z), \quad \forall z \in \mathbb{H}^2,$$

pour tout g de la forme ci-dessus.

Exercice 2. Noyaux invariants et transformée de Selberg Un noyau invariant sur \mathbb{H}^2 est une fonction $k : \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$k(gz, gw) = k(z, w), \quad \forall z, w \in \mathbb{H}^2, \forall g \in \text{PSL}(2, \mathbb{R}),$$

$$k(z, w) = k(w, z), \quad \forall z, w \in \mathbb{H}^2.$$

Un noyau radial sur \mathbb{H}^2 est une fonction $k : \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ donnée par

$$k(z, w) = f(d(z, w)), \quad \forall z, w \in \mathbb{H}^2,$$

où $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction paire.

1. Montrer qu'un noyau radial est invariant.

2. Un noyau invariant définit un opérateur intégral sur les fonctions :

$$A_k f(z) = \int_{\mathbb{H}^2} k(z, w) f(w) d\mu(w).$$

Montrer que ce noyau passe au quotient sur les surfaces hyperboliques compactes $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}^2$.

3. Montrer que toute fonction propre f de Δ associée à la valeur propre λ est aussi une fonction propre de l'opérateur A_k pour tout noyau radial k . Autrement dit, il existe une fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$A_k f(z) = h(\lambda) f(z), \quad \forall z \in \mathbb{H}^2.$$

Pour cela, on pourra admettre qu'il existe une unique fonction $w \mapsto \omega_\lambda(z, w)$ qui est radiale en z et telle que

$$\omega_\lambda(z, z) = 1,$$

$$\Delta_w \omega_\lambda(z, w) = \lambda \omega_\lambda(z, w).$$

4. La transformée de Selberg du noyau radial k est donnée par

$$\mathcal{S}(k)(\lambda) = h(\lambda) = \int_{\mathbb{H}^2} k(d(i, w)) \omega_\lambda(i, w) d\mu(w).$$

On utilisera la paramétrisation $\lambda = s(1-s) = \frac{1}{4} + r^2$, $r \in \mathbb{C}$, et on notera $\mathcal{S}(k)(r) = \mathcal{S}(k)(\lambda)$. Montrer que

$$\mathcal{S}(k)(r) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{irt} g(t) dt,$$

où

$$g(t) = \sqrt{2} \int_{|t|}^{\infty} \frac{k(\rho) \sinh(\rho)}{\sqrt{\cosh(\rho) - \cosh(t)}} d\rho.$$

Solution.

1. C'est une conséquence directe du fait que $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ préserve la métrique !
2. Soit f une fonction Γ -invariante. Alors

$$A_k f(z) = \int_D \left(\sum_{\gamma \in \Gamma} k(z, \gamma w) \right) f(w) d\mu(w) = \int_{\Gamma \backslash \mathbb{H}^2} k(z, \gamma w) f(w) d\mu(w).$$

Ainsi l'opérateur intégral passe bien au quotient.

3. Soit f une fonction propre de Δ pour la valeur propre λ . On a

$$\Delta f(z) = \lambda f(z), \quad \forall z \in S.$$

On utilise la fonction ω_λ donnée dans l'énoncé. On voit que

$$\int_{S_z} f(Tw) dT = \omega_\lambda(z, w) f(z),$$

où S_z est le stabilisateur de z dans $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$. Comme le noyau k est invariant, on a

$$\int_{\mathbb{H}^2} k(z, w) f(w) d\mu(w) = \int_{\mathbb{H}^2} \int_{S_z} k(z, w) f(Tw) d\mu(w) dT = \int_{\mathbb{H}^2} k(z, w) \omega_\lambda(z, w) f(z) d\mu(w).$$

Ainsi, on a comme prévu

$$A_k f(z) = \int_{\mathbb{H}^2} k(z, w) f(w) d\mu(w) = \underbrace{\left(\int_{\mathbb{H}^2} k(z, w) \omega_\lambda(z, w) d\mu(w) \right)}_{h(\lambda)} f(z), \quad \forall z \in \mathbb{H}^2.$$

Il reste toutefois à vérifier que l'expression de $h(\lambda)$ ne dépend pas de z : pour tout $g \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ on a

$$\int_{\mathbb{H}^2} k(gz, gw) \omega_\lambda(gz, w) d\mu(w) = \int_{\mathbb{H}^2} k(z, w) \omega_\lambda(z, w) d\mu(w),$$

donc c'est bon.

4. La fonction $f : z \mapsto \text{Im}(z)^{\frac{1}{2}+ir}$ est une fonction propre du laplacien pour la valeur propre $\lambda = \frac{1}{4} + r^2$. On identifie h à une fonction de r plutôt que de λ pour la suite. D'après la question précédente,

$$h(r) = \int_{\mathbb{H}^2} k(d(i, z)) \text{Im}(z)^{\frac{1}{2}+ir} d\mu(z).$$

On pose $U(\cosh(\rho)) = k(\rho)$. D'après l'expression de la distance hyperbolique dans le demi-plan, on a

$$U\left(1 + \frac{|z-w|^2}{2\text{Im}(z)\text{Im}(w)}\right) = k(d(z, w)), \quad \forall z, w \in \mathbb{H}^2.$$

On remplace $d(i, z)$ à l'aide de cette formule dans l'intégrale précédente et on utilise la représentation $z = x + iy$:

$$h(r) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} U\left(1 + \frac{1+x^2+y^2}{2y}\right) y^{\frac{1}{2}+ir} \frac{dy}{y^2} dx.$$

Par des changements de variables successifs ($t = (1+x^2+y^2)/2y$, puis $u = \log y$ et enfin $\cosh(\rho) = t$), on obtient la forme voulue.

Exercice 3. Noyau de la chaleur Le noyau de la chaleur sur \mathbb{H}^2 est un noyau invariant p_t solution fondamentale de l'équation de la chaleur

$$\frac{d}{dt} p_t(z, w) + \Delta_z p_t(z, w) = 0, \quad \forall z, w \in \mathbb{H}^2,$$

$$\lim_{t \downarrow 0} \int_{\mathbb{H}^2} p_t(z, w) f(w) d\mu(w) = f(z), \quad \forall f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{H}^2), \forall z \in \mathbb{H}^2.$$

1. Montrer que la transformée de Selberg h_t de p_t s'écrit

$$h_t(r) = e^{-(\frac{1}{4}+r^2)t}.$$

2. En déduire que

$$p_t(z, w) = \frac{\sqrt{2}e^{-\frac{t}{4}}}{(4\pi t)^{3/2}} \int_{d(z, w)}^{\infty} \frac{ue^{-\frac{u^2}{4t}} du}{\sqrt{\cosh(u) - \cosh(d(z, w))}}.$$

3. Soit $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}^2$ une surface hyperbolique compacte. Montrer que

$$\#\{\gamma \in \Gamma : d(z, \gamma w) < T\} \leq Ce^T$$

4. En utilisant la question précédente et en admettant qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$p_t(z, w) \leq \frac{C}{t} e^{-\frac{d(z, w)^2}{8t}},$$

montrer que

$$\tilde{p}_t(z, w) = \sum_{\gamma \in \Gamma} p_t(z, \gamma w)$$

est bien défini.

5. Montrer que \tilde{p}_t est un noyau de la chaleur sur S .
 6. Montrer que cette solution fondamentale de l'équation de la chaleur sur S est unique.

Solution.

1. Soit f une fonction propre de Δ pour la valeur propre $\lambda = \frac{1}{4} + r^2$. On a vu dans l'exercice précédent que

$$h_t(r)f(z) = \int_{\mathbb{H}^2} p_t(z, w)f(w)d\mu(w).$$

Il vient que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}h_t(r)f(z) &= \int_{\mathbb{H}^2} \frac{d}{dt}p_t(z, w)f(w)d\mu(w) \\ &= - \int_{\mathbb{H}^2} \Delta p_t(z, w)f(w)d\mu(w) && \text{(eq. de la chaleur)} \\ &= - \int_{\mathbb{H}^2} p_t(z, w)\Delta f(w)d\mu(w) && \text{(int. par parties)} \\ &= - \left(\frac{1}{4} + r^2\right) \int_{\mathbb{H}^2} p_t(z, w)f(w)d\mu(w) && \text{(fonction propre)} \\ &= - \left(\frac{1}{4} + r^2\right) h_t(r)f(z). \end{aligned}$$

De plus, la condition initiale du noyau de la chaleur implique que $\lim_{t \rightarrow 0^+} h_t(r) = 1$. Ainsi, en résolvant l'équation différentielle satisfaite par $t \mapsto h_t(r)$, on a pour tout r

$$h_t(r) = e^{-(\frac{1}{4} + r^2)t}.$$

2. Pour obtenir le noyau de la chaleur, il faut calculer la transformée de Selberg inverse de la fonction h_t calculée précédemment. On peut montrer que

$$p_t(z, w) = -\frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_{d(z, w)}^{\infty} \frac{g'(u)}{\sqrt{\cosh u - \cosh d(z, w)}} du,$$

où

$$g(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iru} h(r) dr.$$

En effet, on obtient h à partir de g par transformée de Fourier inverse, et

$$g(u) = \sqrt{2} \int_{|u|}^{\infty} \frac{p_t(\rho) \sinh(\rho)}{\sqrt{\cosh \rho - \cosh u}} d\rho,$$

en notant $p_t(\rho) = p_t(z, w)$ pour tous z, w tels que $d(z, w) = \rho$ (ce qui est possible car le noyau de la chaleur est radial). On effectue les changements de variables $x = \cosh u$ et $t = \cosh \rho$, ce qui donne

$$g(\cosh^{-1} x) = \sqrt{2} \int_x^{\infty} \frac{p_t(\cosh^{-1} t)}{\sqrt{t - x}} dt = \sqrt{2} \int_0^{\infty} p_t(\cosh^{-1}(x + u^2)) du,$$

où la dernière égalité provient du changement de variable $u = \sqrt{t-x}$. Si l'on pose $F(t) = p_t(\cosh^{-1}(t))$, on a d'un côté

$$\frac{d}{dx}g(\cosh^{-1}(x)) = 2\sqrt{2} \int_0^\infty F'(x+u^2)du,$$

et de l'autre

$$\begin{aligned} F(t) &= - \int_0^\infty \frac{d}{du}F(t+u^2)du \\ &= -2 \int_0^\infty F'(t+u^2)udu \\ &= -\frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty F'(t+u^2)udud\theta \\ &= -\frac{4}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty F'(t+x^2+y^2)dx dy \\ &= -\frac{2}{\pi\sqrt{2}} \int_0^\infty \frac{d}{dt}g(\cosh^{-1}(t+y^2))dy \\ &= -\frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_t^\infty \frac{\frac{d}{dw}g(\cosh^{-1}(w))}{\sqrt{w-t}}dw. \end{aligned}$$

On procède ensuite au changement de variables

$$t = \cosh \rho, \quad w = \cosh u,$$

ce qui donne en particulier

$$\frac{d}{dx}g(\cosh^{-1}(x))dx = g'(u)du,$$

et on obtient

$$p_t(\rho) = -\frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_\rho^\infty \frac{g'(u)}{\sqrt{\cosh u - \cosh \rho}} du,$$

comme attendu. Pour finir, on calcule g à partir de h , et la formule voulue en découle.

3. Par inégalité triangulaire, on a pour tous $z, w \in \mathbb{H}^2$ et $\gamma \in \Gamma$,

$$d(z, w) \leq d(z, \gamma w) + d(\gamma w, w),$$

donc on peut sans perdre de généralité supposer $z = w$. Soit D le domaine fondamental de Dirichlet en z (cf. TD 2, exercice 3). On a

$$\#\{\gamma \in \Gamma : d(z, \gamma z) < T\} = \frac{1}{|D|} \left| \bigcup_{\gamma: d(z, \gamma z) < T} \gamma D \right| \leq \frac{1}{|D|} |B_{T+\text{diam}(D)}(z)|,$$

où $B_{T+\text{diam}(D)}(z)$ est le disque de centre z et de rayon $T + \text{diam}(D)$. On en déduit alors que

$$\#\{\gamma \in \Gamma : d(z, \gamma z) < T\} \leq Ce^T.$$

4. On a

$$\tilde{p}_t(z, w) \leq C \sum_{n=0}^{\infty} \#\{\gamma \in \Gamma : n \leq d(w, \gamma w) < n+1\} t^{-1} e^{-n^2/8t} \leq C \sum_{n=0}^{\infty} t^{-1} e^n e^{-n^2/8t} < \infty,$$

ce qui garantit la bonne définition de $\tilde{p}_t(z, w)$.

5. Il suffit de vérifier que le noyau satisfait bien l'équation de la chaleur (immédiat), et la limite en $t \rightarrow 0^+$ est également immédiate.
6. Si (u_t) et (v_t) sont deux solutions de l'équation de la chaleur sur S avec même condition initiale, alors $k_t = u_t - v_t$ est solution de l'équation de la chaleur avec pour condition initiale $k_0 = 0$. On a

$$\frac{d}{dt} \int_S k_t^2(z) d\mu(z) = 2 \langle k_t, \frac{d}{dt} k_t \rangle = -2 \langle k_t, \Delta k_t \rangle = 0,$$

et la condition initiale permet de conclure que $k_t = 0$ pour tout $t \geq 0$, ce qui implique l'unicité des solutions.

Remarque. Le noyau de la chaleur permet de démontrer (mais on ne va pas le faire!) un théorème fondamental : pour toute surface hyperbolique compacte $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}^2$, il existe une base orthonormale $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $L^2(S)$ et une suite $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ de nombres réels tels que $\lambda_n \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$, et

$$\Delta \phi_n = \lambda_n \phi_n.$$